



**Provas Especialmente Adequadas Destinadas a Avaliar a Capacidade
para a Frequência dos Cursos Superiores do Instituto Politécnico de Leiria dos Maiores
de 23 Anos - 2024**

**Prova escrita de conhecimentos específicos
de Matemática**

Instruções gerais

1. A prova é constituída por 2 grupos de questões obrigatórias.
2. A duração da prova é de 2 horas, estando prevista uma tolerância de 30 minutos;
3. Só pode utilizar para elaboração das suas respostas e para efetuar os rascunhos as folhas distribuídas pelo docente vigilante, salvo se previsto outro procedimento;
4. Não utilize qualquer tipo de corretor. Se necessário risque ou peça uma troca de folha;
5. Não é autorizada a utilização de quaisquer ferramentas de natureza eletrónica (telemóvel, *ipad*, computador portátil, leitores/gravadores digitais de qualquer natureza ou outros não especificados), exceto máquina de calcular para realizar cálculos e obter representações gráficas de funções, devidamente autorizadas.
6. Deverá disponibilizar ao docente que está a vigiar a sala, sempre que solicitado, um documento válido de identificação (cartão de cidadão, bilhete de identidade, carta de condução ou passaporte);
7. A cotação de cada questão encontra-se na última página da prova.

Leiria, 25 de maio de 2024

Provas Especialmente Adequadas Destinadas a
Avaliar a Capacidade para a Frequência dos Cursos
Superiores do Instituto Politécnico de Leiria
dos Maiores de 23 Anos – 2024

Prova de Avaliação de MATEMÁTICA

- **Identifique claramente os grupos e as questões a que responde.**
- As funções **trigonométricas** estão escritas no idioma **anglo saxónico**.
- Utilize apenas caneta ou esferográfica de **tinta azul** ou **preta**.
- É **interdito** o uso de “**esferográfica lápis**” e de **corretor**.
- A prova de avaliação tem **9 páginas**.
- A prova de avaliação inclui um **formulário** na **página 8**.
- As **cotações** da prova de avaliação encontram-se na **página 9**.

Grupo I

- As **dez questões** deste grupo são de **escolha múltipla**.
- Em cada questão são indicadas **quatro alternativas** de resposta das quais **só uma está correta**.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que selecionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma letra ou se esta for ilegível, a sua **resposta** será considerada **incorreta**.
- As **respostas incorretas** terão **cotação nula**.
- **Não apresente nem cálculos nem justificações**.

1. Considere, em \mathbb{R} , os polinómios P e Q definidos por,

$$P(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18 \quad \text{e} \quad Q(x) = x^3 - 3x + 2.$$

Qual é o conjunto solução da condição $P(x) > Q(x)$?

- (A) $x \in]0, 2[.$ (B) $x \in]-2, 0[.$ (C) $x \in]-2, 2[.$ (D) $x \in]-2, +\infty[.$

2. Considere, em \mathbb{R} , o polinómio R de grau 3 definido por:

- -3 é o coeficiente do termo de maior grau.
- 1 e 3 são duas das suas raízes reais.
- 1 é o resto da divisão pelo polinómio $x + 1$.

Qual é a expressão analítica do polinómio R , de coeficientes reais, na variável x ?

- (A) $R(x) = -3x^3 + \frac{8}{73}x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{8}{69}.$ (B) $R(x) = -3x^3 + \frac{73}{8}x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{69}{8}.$
(C) $R(x) = -3x^3 + 8x^2 + \frac{5}{2}x - 69.$ (D) $R(x) = -3x^3 + \frac{73}{8}x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{69}{8}.$

3. Considere a e b dois números reais superiores a 1 e tais que $b = a^2$.

Qual é o valor da expressão designatória $2 + \log_b(a)$ (\log_b representa a função logaritmo na base b)?

- (A) $\frac{5}{2}.$ (B) $\frac{3}{2}.$ (C) $\frac{5}{3}.$ (D) $\frac{1}{2}.$

4. Considere que para uma certa constante real k , o gráfico da função f , real de variável real, definida por (ln representa a função logaritmo de base e e e representa o número de Neper),

$$f(x) = x \cdot \ln(kx)$$

tem, no ponto de abscissa 1, uma reta tangente com declive igual a 3.

Qual é o valor da constante k ?

- (A) $\frac{1}{e^2}$. (B) e . (C) e^2 . (D) e^3 .

5. Considere a progressão aritmética (u_n) tal que $u_6 = 10$ e $u_{10} = 9$.

Qual é o valor de u_{15} ?

- (A) $\frac{31}{4}$. (B) $\frac{31}{3}$. (C) $\frac{5}{33}$. (D) $\frac{4}{31}$.

6. Considere a sucessão (v_n) tal que $\lim v_n = 0$.

Qual é a expressão designatória que expressa o termo geral de v_n ?

- (A) $\frac{2n^2 + 1}{n}$. (B) $\left(1 - \frac{3}{n}\right)^n$. (C) $\frac{5n + 3}{2n + 4}$. (D) $\frac{(-1)^n}{n}$.

7. Considere a função g , real de variável real, contínua em \mathbb{R} e de contradomínio $[2, 4]$.

Qual é o valor do limite definido por (sin representa a função seno),

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) \cdot \sin(4x)}{x}?$$

- (A) 3. (B) 5. (C) 9. (D) 17.

8. Considere, em \mathbb{R} , a equação trigonométrica definida por (sin representa a função seno),

$$2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1.$$

Qual é o conjunto solução da equação trigonométrica?

- (A) $S = \left\{x \in \mathbb{R} : x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
(B) $S = \left\{x \in \mathbb{R} : x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
(C) $S = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
(D) $S = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

9. Considere que num saco estão 20 bolas de igual tamanho, numeradas de 1 a 20. Retiram-se, simultaneamente e ao acaso, quatro bolas do saco. Qual é a probabilidade de saírem quatro bolas numeradas com números consecutivos?
- (A) $\frac{4! \cdot 16!}{20!}$. (B) $\frac{17!}{20C_4}$. (C) $\frac{17}{20C_4}$. (D) $\frac{5}{20C_4}$.
10. Considere uma experiência aleatória, com espaço de resultados Ω finito e dois acontecimentos $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$, associados a essa experiência. Sabe-se que $P(B) = 0,60$, $P(A \cap B) = 0,10$ e $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,20$. Qual é o valor de $P(\bar{A})$?
- (A) 0,20. (B) 0,30. (C) 0,40. (D) 0,70.

Grupo II

- Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de maneira clara, indicando **todos os cálculos** que efetuar e **todas as justificações** necessárias.
- Pode **recorrer à sua máquina de calcular** para efetuar cálculos e obter representações gráficas de funções.
- **Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida uma aproximação, pretende-se sempre o **valor exato**.

1. Considere a função f , real de variável real, definida por (e representa o número de Neper),

$$f(x) = (x - 1)^2 \cdot e^{x-3}.$$

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, resolva os itens seguintes.

- (a) Determine o domínio e os zeros da função f .
 - (b) Determine a primeira derivada da função f .
 - (c) Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.
 - (d) Determine uma equação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 2.
2. Considere que se pretende construir uma cerca para animais vedando parte de um terreno, junto a um muro, como ilustrado na Figura 1, cujas dimensões indicadas estão expressas em metros. Três lados da cerca confinam com o muro e os outros três lados ficam definidos por uma rede.

Tal como ilustra a Figura 1, x é a medida em metros, de um dos lados da cerca. Sabe-se que, na sua totalidade, vão ser utilizados 120 metros de rede.



Figura 1: plano da cerca para animais.

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, resolva os itens seguintes.

- (a) Mostre que a área, em metros quadrados, da cerca, é dada, em função de x , por,

$$A(x) = -2x^2 + 96x + 856.$$

- (b) Determine o valor de x para o qual a área da cerca é máxima e determine-a.
 (c) Determine quais devem ser as dimensões da cerca para que a sua área seja igual a 1360 metros quadrados.

3. Considere a sucessão (u_n) , definida por recorrência,

$$\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, resolva os itens seguintes.

- (a) Demonstre que (u_n) é uma progressão aritmética decrescente.
 (b) Determine uma expressão do termo geral da sucessão (u_n) .
 (c) Determine a soma dos 30 termos consecutivos da sucessão, a partir do 30º termo (inclusive).

4. Considere um grupo de pessoas constituído por cinco homens e quatro mulheres.

Deste grupo de pessoas vai ser escolhida uma comissão de seis pessoas.

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, resolva os itens seguintes.

De quantas maneiras pode ser realizada a escolha das pessoas:

- (a) sem qualquer restrição?
- (b) de modo que a comissão tenha tantos homens como mulheres?
- (c) de modo que pelo menos duas mulheres façam parte da comissão?

5. O Luís utiliza, por vezes, o comboio para ir de casa para a Universidade.

Quando não vai de comboio, desloca-se no automóvel do pai.

Sabe-se que usa o comboio 40 % das vezes e que, quando usa este meio de transporte, a probabilidade de chegar atrasado é de 10 %.

Quando se desloca no automóvel do pai, chega atrasado 20 % das vezes.

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, resolva os itens seguintes.

Determine a probabilidade do Luís, num dia útil escolhido ao acaso:

- (a) ter ido de comboio para a Universidade e chegar atrasado.
- (b) chegar atrasado à Universidade.
- (c) ter ido de comboio para a Universidade, sabendo que chegou atrasado.

6. Relativamente à Figura 2 sabe-se que:

- o segmento de reta $[AC]$ tem comprimento 4.
- o ponto B é o ponto médio do segmento de reta $[AC]$.
- o segmento de reta $[BD]$ é perpendicular ao segmento de reta $[AC]$.
- o arco de circunferência \widehat{CD} tem centro no ponto B .

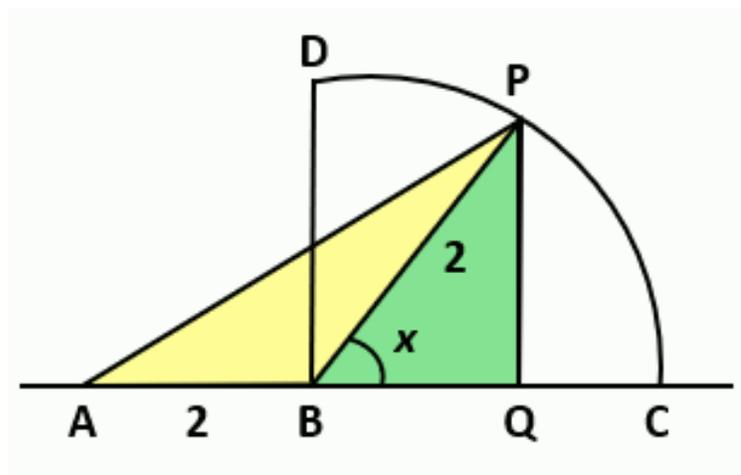


Figura 2: área do triângulo $[APQ]$.

Admita que um ponto P se desloca ao longo do arco \widehat{CD} , mas nunca coincidindo com o ponto C nem com o ponto D , e que um ponto Q se desloca ao longo do segmento de reta $[BC]$ de tal modo que o segmento de reta $[PQ]$ é sempre perpendicular ao segmento de reta $[BC]$.

Para cada posição do ponto P , seja x a amplitude, em radianos, do ângulo CBP e seja $A(x)$ a área do triângulo $[APQ]$.

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, resolva os itens seguintes.

(a) Demonstre que (sin representa a função seno),

$$A(x) = 2 \sin(x) + \sin(2x), \quad \left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right).$$

(b) Determine o valor de x para o qual o valor da área do triângulo $[APQ]$ é máxima.

FIM da Prova de Avaliação

FORMULÁRIO

Regras de Derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^k)' = k \cdot u^{k-1} \cdot u' \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$(\sin(u))' = u' \cdot \cos(u)$$

$$(\cos(u))' = -u' \cdot \sin(u)$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln(a) \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a(u))' = \frac{u'}{u \cdot \ln(a)} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Trigonometria

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cdot \cos(b) + \sin(b) \cdot \cos(a)$$

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b)$$

Área de Figuras Planas

$$\text{Trapézio: } \frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \cdot \text{Altura}$$

Probabilidades

$$\mu = p_1 \cdot x_1 + \dots + p_n \cdot x_n$$

$$\sigma = \sqrt{p_1 \cdot (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n \cdot (x_n - \mu)^2}$$

Se X é $N(\mu, \sigma)$ então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

$$\text{Progressão aritmética: } \frac{u_1 + u_n}{2} \cdot n$$

$$\text{Progressão geométrica: } u_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Limites Notáveis

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{u_n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{u_n}\right)^{u_n} = e^x \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

COTAÇÕES

Grupo I	70
Cada resposta certa	7
Cada resposta errada, anulada ou não respondida	0
Grupo II	130
1.	25
(a)	3
(b)	8
(c)	8
(d)	6
2.	25
(a)	10
(b)	8
(c)	7
3.	20
(a)	4
(b)	6
(c)	10
4.	20
(a)	5
(b)	7
(c)	8
5.	20
(a)	5
(b)	8
(c)	7
6.	20
(a)	10
(b)	10
Total	200